最小妒忌公平性区位模型及案例分析

孔云峰[1,2]，翟石艳[1,2]

(1 河南大学黄河中下游数字地理技术教育部重点实验室，河南 开封，475000；2 河南大学地理与环境学院，河南 开封，475000)

摘要：区位模型广泛应用于公共健康、义务教育、应急管理和物流配送等领域。然而，主流区位问题多以服务效率为目标，注重设施成本、距离成本、覆盖客户数量等指标，未考虑服务公平性。部分区位模型考虑服务空间公平性，但存在公平指标多且选择使用缺乏共识、公平指标会严重扭曲效率指标、模型针对简单应用场景和缺乏通用性等局限。本文创新性地引入空间妒忌这一概念，构建公共服务最小嫉妒目标函数，并将其整合在容量约束 P 中值问题(Capacitated P-Median Problem, CPMP)模型目标函数中，形成最小妒忌公平性区位模型(CPMP-envy)。新模型克服了最小方差目标会扭曲效率指标的局限，实现公平指标与效率指标相兼容。本文考虑城市和农村地区人口空间分布特征，以及数据规模等因素，使用三个典型区域数据探索经典区位模型和公平性区位模型的基本特征。案例实验表明：最小妒忌目标能够显著地改进设施区位空间公平性指标，特别是设施数量较少时，公平性指标能够得到较大幅度改进。最小妒忌目标在公共服务设施布局规划中具有实用性，对于构建公平性区位模型具有理论价值。

关键词：公共服务；区位模型；空间公平；最小方差；最小妒忌；案例分析

1 引言

区位问题是地理学、数学、区域科学、管理科学、交通科学、计算机科学等学科共同关注的一个基础性问题[1]。自上世纪 50 年代以来，区位问题模型建构、数学性质与求解算法研究持续不断。经典的区位问题包括区位集覆盖问题(Location Set Covering problem, LSCP)[2]、P 中值问题(P-Median Problem, PMP)[3]、P 中心问题(P-Center problem, PCP)[4]、最大覆盖区位问题(Maximum Covering Location Problem, MCLP)[5]、设施区位问题(Uncapacitated Facility Location Problem, UFLP)[6]等。随区位问题研究的深入和应用范围的扩大，经典问题中逐渐加入了设施容量限制，如容量约束 P 中值问题(Capacitated P-Median Problem, CPMP)[7]、容量约束 P 中心问题(Capacitated P-Center problem, CPCP)[8]、容量约束区位集覆盖问题(Capacitated Location Set Covering problem, CLSCP)和容量约束最大覆盖区位问题(Capacitated Maximum Covering Location Problem, CMCLP)[9]、容量约束设施区位问题(Capacitated Facilities Location Problem, CFLP)[10]等。

上述问题均是从候选区位中选择部分区位，用于建设服务设施，并确定设施为哪些需求提供服务。其中，PMP、PCP 和 MCLP 模型均需事先确定设施数量，PMP 最小化总距离成本，PCP 最小化最大距离，而 MCLP 最大限度地覆盖需求；LSCP 和 UFLP 不需要事先确定设施数量，前者尽可能使用最少的设施或者总成本最低的设施，后者兼顾设施总成本和总距离成本。上述模型广泛应用于公共健康、义务教育、应急管理、物流配送、休闲娱乐等领域。然而，主流区位问题多以服务效率为目标，注重设施成本、距离成本、覆盖客户数量等指标，

基金项目：国家自然科学基金项目（41871307）。[**Foundation item**: National Natural Science Foundation of China, No. 41871307.]

作者：孔云峰(1967—)，教授，主要从事空间分析、空间优化等研究。E-mail: yfkong@henu.edu.cn.翟石艳(1983—)，副教授，主要从事空间分析、空间优化和空间行为决策等。E-mail: zsycenu@hotmail.com

未考虑服务公平性。

公平性区位是具有挑战性的一类区位问题。随经济社会快速发展，区位问题已广泛应用于公共服务设施规划，且越来越注重空间公平性[11-15]。国家《"十四五"公共服务规划》对服务设施布局提出了基本要求：需求全覆盖，质量全达标；均等享有，便利可及。为满足公共服务设施空间公平性需求，学者提出多个公平性指标，如距离极值、方差、变异系数、Gini系数等[16]，并基于公平性指标建立各种公平性区位模型。

这些模型可归纳为两大类。第一，使用公平性目标函数。将经典区位模型的效率目标替换为公平性目标函数，如最小化距离基尼系数[17-18]、最小化 β-mean 距离[19]、最小化距离与期望值偏差[20]。Berman 使用最小化距离方差目标函数，并引入平均距离约束条件，防止公平性目标扭曲服务效率指标[21]。王法辉等发展了两步优化法(Two-step Optimization for Spatial Accessibility Improvement，2SO4SAI)，先使用 MCLP 或 PMP 模型选择设施区位，再以最小化 2SFCA 可达性方差为目标分配资源 [22-26]。第二，使用多目标优化模型。优化目标包括效率指标函数和公平指标函数，模型求解获得 Pareto 最优解集。常见的方法是在经典区位模型中增加最小化距离方差、最小化覆盖率差异、最小化偏差等公平性目标，构造多目标优化模型 [27-32]。也可以将公平指标函数与效率指标函数加权相加为单目标函数，例如，将 β-mean 距离和平均距离加权之和作为目标函数，使新冠检测点选址兼顾到可及性和公平性 [29][33]。

基于公平性指标所建立的各种公平性区位模型，存在较大的局限性，严重影响其应用成效。首先，公平性指标多，相互差异较大，如何选择指标缺乏共识[17]。其次，常见公平性目标(如方差、变异系数和 Gini 系数)会严重扭曲效率指标[18]，计算结果难以获得实用的设施布局方案。第三，公平性指标往往是非线性的 [24]，导致模型构建困难，且模型计算复杂度极高。第四，现有公平性区位模型多是应对简单场景(如未考虑设施容量)，针对具体应用，通用性不足。例如，2SO4SAI 方法应用案例较多，主要用于公平地分配资源到设施区位，并非选择公平性区位。

综上，现有公平性区位模型仍存在较大的局限性，相关研究进展不大[15]。针对公平性区位模型面临的问题与挑战，本文梳理相关研究进展，综合考虑城市和农村地区人口空间分布特征，以及数据规模等因素，使用三个典型区域数据探索经典区位模型和公平性区位模型的基本特征。通过案例实验总结最小化方差区位模型的特征及局限，并尝试构建新的公平性区位模型。新模型试图克服现有模型的局限，也为公平导向公共服务设施布局规划提供新方法。

2 公平性区位模型构建

令集合 $I=\{1,2\cdots n\}$ 表示 n 个候选服务设施区位，设施 $i(i\in I)$ 有最大服务容量s_i和固定成本f_i；集合 $J=\{1,2\cdots m\}$ 表示 m 个空间单元，单元 $j(j\in J)$ 的服务需求量为w_j；空间单元 i 与单元 j 之间的距离为d_{ij}、距离成本为c_{ij}。定义布尔型决策变量x_{ij}为是否指派设施 i 服务需求单元 j；布尔型决策变量y_i表示是否在区位 i 建设施。基于这些定义，可以构建经典区位模型和公平性区位模型。

CPMP 模型：

$$Minimize{:}\ \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} w_j d_{ij} x_{ij} \tag{1-1}$$

$$Subject\ to{:}\ \sum_{i\in I} x_{ij}=1, \forall j\in J \tag{1-2}$$

$$\sum_{j\in J} w_j x_{ij} \le s_i y_i, \forall i\in I \tag{1-3}$$

$$\sum_{i\in I} y_i = P \quad (1-4)$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0,1\}, \forall i \in I, j \in J \quad (1-5)$$

方差最小区位模型(Minimum Variance Location Problem, MVLP)：

$$Minimize: \sum_{j\in J} w_j d_j^2 + \sum_{j\in J} w_j d'^2 - 2\sum_{j\in J} w_j d_j d' \quad (2-1)$$

$$Subject\ to: \sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \forall j \in J \quad (2-2)$$

$$\sum_{j\in J} w_j x_{ij} \le s_i y_i, \forall i \in I \quad (2-3)$$

$$\sum_{i\in I} y_i = P \quad (2-4)$$

$$d_j = \sum_{i\in I} d_{ij} x_{ij}, \forall j \in J \quad (2-5)$$

$$d' = \sum_{j\in J} w_j d_j \ / \sum_{j\in J} w_j \quad (2-6)$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0,1\}, \forall i \in I, j \in J \quad (2-7)$$

$$d_j, d' \ge 0, \forall j \in J \quad (2-8)$$

MVLP 模型中，d_j表示需求点j使用服务的出行距离，d'为平均出行距离，目标(2-1)为出行距离方差。MVLP 模型是一个二次规划模型，与 CPMP 模相比，增加了决策变量d_j和d'，也增加了相应的约束条件。

给定距离均值d'，并增加最大均值约束，可将 MVLP 模型转化为线性规划模型(Minimum Variance Location Problem with Maximum Distance, MVLP-MD)：

$$Minimize: \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} w_j (d_{ij} - d')^2 x_{ij} \quad (3-1)$$

$$Subject\ to: \sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \forall j \in J \quad (3-2)$$

$$\sum_{j\in J} w_j x_{ij} \le s_i y_i, \forall i \in I \quad (3-3)$$

$$\sum_{i\in I} y_i = P \quad (3-4)$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} w_j d_{ij} x_{ij} \le d' * \sum_{j\in J} w_j \quad (3-5)$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0,1\}, \forall i \in I, j \in J \quad (3-6)$$

给定不同的距离均值d'，MVLP-MD 模型能够获得不同的区位方案。

因距离方差公平性指标会严重扭曲效率指标，本文将最小方差指标修订为最小“妒忌”指标。给定距离参数d^*，假定某一区位人群使用服务出行距离超过d^*时，会有不公平感知，或者会对使用服务出行距离小于d^*的人群产生妒忌。定义区位j妒忌值为：

$$v_j = \begin{cases} 0, \forall d_{ij} \le d^* \\ (d_{ij} - d')^2, \forall d_{ij} > d^* \end{cases} \quad (4-1)$$

妒忌值v_j累加为最小妒忌目标函数：

$$Minimize\ \sum_{j\in J} w_j v_j = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J, d_{ij}\ge d^*} w_j (d_{ij} - d^*)^2 x_{ij} \quad (4-2)$$

目标函数(5-2)仅计算出行距离大于d^*人群的距离差异平方值，有利于降低设施布局的不公平性。因出行距离较远的需求者才有不公平感知，该指标与空间可及性指标不冲突，不会扭曲可及性指标。

将函数(5-2)加入 CPMP 得到改进的区位模型，记为 CPMP-envy 模型：

$$Minimize: \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} w_j d_{ij} x_{ij} + \alpha \sum_{i\in I}\sum_{j\in J, d_{ij}\ge d^*} w_j (d_{ij} - d^*)^2 x_{ij} \quad (5-1)$$

$$Subject\ to: \sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \forall j \in J \quad (5-2)$$

$$\sum_{j\in J} w_j x_{ij} \le s_i y_i, \forall i \in I \quad (5-3)$$

$$\sum_{i\in I} y_i = P \quad (5-4)$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0,1\}, \forall i \in I, j \in J \quad (5-5)$$

CPMP-envy 模型中，妒忌目标权重α的取值较为重要。若权重α数值过小，妒忌目标不起作用，模型趋近于 CPMP 模型；若权重α数值过大，妒忌目标会扭曲距离成本目标。因此，权重α数值选择的原则是：妒忌目标和距离成本目标数值接近，不会扭曲成本目标，又能增加空间公平性。

假设距离均值为d^*，距离均方差为$\delta = \gamma d^*$，目标函数(5-1)中，第一部分数值为$\sum_{j\in J} w_j * d^*$，第二部分估值为$(0.5\gamma^2 d^{*2}) * \sum_{j\in J} w_j$。令$\alpha = 2\gamma^{-2}/d^*$，目标函数(5-1)中，两部分量纲一致，且数值接近。注意，$\gamma = \delta/d^*$是距离变异系数，当γ=0.5 时，$\alpha = 8.0/d^*$，当γ=0.6 时，$\alpha \approx 5.6/d^*$。较为准确地估算d^*和γ，有利于 CPMP-envy 模型获得较为公平的公共服务。

3 模型实验

3.1 实验设计

本文使用三个区域数据探索经典区位模型和公平性区位模型的基本特征。三个区域特征如表 1 所示，考虑到了城市和农村区域，也考虑到了数据规模。区域 GY 和 ZZ 将人口数量作为需求量，区域 ZY 将小学生人数作为需求量。区域 GY 选择初级中学、乡镇居民点、街道办事处，以及若干规模较大行政村作为候选设施区位；区域 ZY 将所有需求点作为候选设施区位；将区域 ZZ 划分为 0.7km^2 正六边形格网，从每个格网中距离中心位置最近的 6 个需求点中随机选择一个点作为候选区位。

表 1 案例基本特征

Tab. 1 Summary of instance attributes

区域名称	地理背景	面积(km^2)	需求点数量	总需求数量	候选设施点数量	设施容量(人数)
GY	农村	998.7	1276	819812	135	40000
ZY	城市	13.4	324	3873	324	400
ZZ	城市	297.8	6752	4223997	444	50000-90000

所有区域案例中，距离d_{ij}采用千米单位，距离成本$c_{ij} = 1.0 * d_{ij}$。CPMP 和 CPMP-envy 模型使用数学启发算法求解[34]。对于每一个案例的计算结果，统计常见服务指标，如设施数量、平均距离、最大距离、方差、标准差、变异系数、Gini 系数等指标。令$d_j = \sum_{j\in I} d_{ij} x_{ij}$，$\overline{d} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} d_{ij} x_{ij} / \sum_{j\in J} w_j$，距离方差(*Var*)计算公式见(6-1)。

$$Var = \frac{\sum_{j\in J} w_j (d_i - \overline{d})^2}{\sum_{j\in J} w_j} \quad (6-1)$$

距离标准差(*Stdev*)和变异系数(*CV*)见公式(6-2)和(6-3)：

$$Stdev = Var^{-2} \quad (6-2)$$

$$CV = Stdev/\overline{d} \quad (6-3)$$

考虑到各区位需求量，Gini 系数(*GC*)计算公式见(6-3)。

$$GC = \frac{\sum_{i\in J}\sum_{j\in J} w_i w_j |d_i - d_j|}{2\sum_{j\in J} w_j * \sum_{j\in J} w_j d_j} \quad (6-4)$$

3.2 案例计算结果

案例 GY 计算结果统计见表 2。表中各栏目依次为模型名称、模型参数、设施数量及各区位出行距离的均值、极值、方差、标准差、变异系数和 Gini 系数。对于 CPMP 模型(P=23)，平均距离、最大距离、方差、标准差、变异系数和 Gini 系数依次为 1.948、8.218、2.318、1.522、0.782 和 0.439；增加最小妒忌目标，平均距离增加 5.3%，但最大距离、方差、标准差、变异系数和 Gini 系数减小显著，分别减小 14.8%、21.0%、11.1%、15.7%和 14.6%。设施数量减少(P=22)或者设施数量增加(P=24)，除平均距离指标外，CPMP-envy 结果的最大距离、方差、标准差、变异系数和标准差指标均优于 CPMP 模型。上述结果表明，增加最小妒忌目标，公平性指标可明显改善。

表 2 案例 GY 计算结果统计

Tab. 2 Computational results from instance GY

模型名称	模型参数	设施数量	平均距离	最大距离	方差	标准差	变异系数	Gini 系数
CPMP	P=22	22	2.064	8.641	2.419	1.555	0.754	0.422
CPMP-envy	P=22,d^*=2.0km,α=4.0	22	2.151	8.218	1.988	1.410	0.655	0.370
CPMP	P=23	23	1.948	8.218	2.318	1.522	0.782	0.439
CPMP-envy	P=23,d^*=2.0km,α=4.0	23	2.052	7.002	1.831	1.353	0.659	0.375
CPMP	P=24	24	1.875	8.218	2.190	1.480	0.789	0.445
CPMP-envy	P=24,d^*=2.0km,α=4.0	24	2.007	6.372	1.618	1.272	0.634	0.360

备注：CPMP：容量约束 P 中心问题；CPMP-envy：最小妒忌公平性区位模型

图 1 为 CPMP 和 CPMP-envy 模型(P=23)计算结果示意图。从统计指标看，两个模型结果中平均出行距离差异不算太大(5.3%)，后者方差和 Gini 系数指标有较大幅度的下降。同时，两个模型所选择设施区位差异巨大，23 个设施区位中，仅 11 个位置相同。

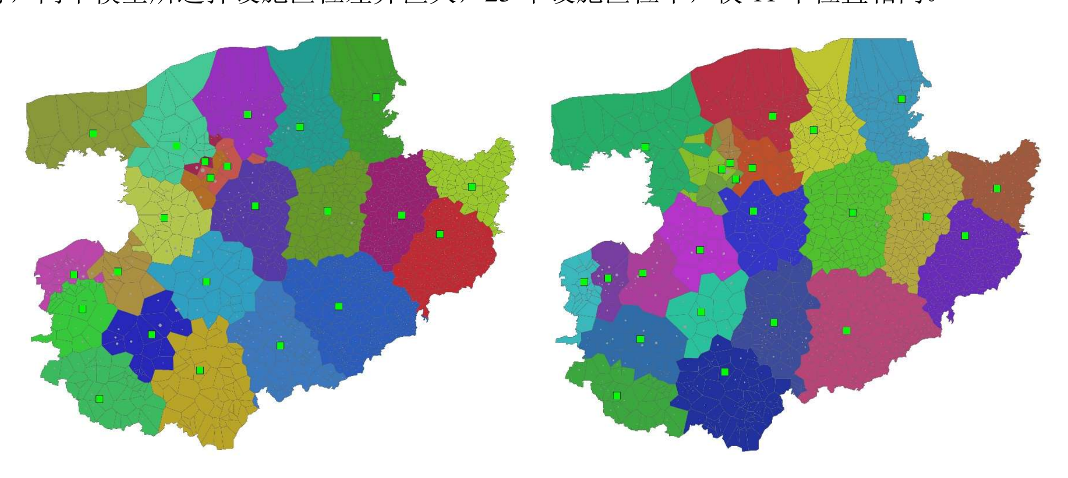


图 1 GY 案例 CPMP(左)和 CPMP-envy(右)模型计算结果示意图

Fig.1 CPMP (left) and CPMP-envy (right) solutions from instance GY

案例 ZY 计算结果统计见表 3。表中各栏目含义与表 1 相同。对于 CPMP 模型(P=11)，平均距离、最大距离、方差、标准差、变异系数和 Gini 系数依次为 0.408、1.053、0.046、0.214、0.526 和 0.285；增加最小妒忌目标，平均距离增加 2.9%，但最大距离、方差、标准差、变异系数和 Gini 系数减小显著，分别减少 4.5%、26.1%、14.0%、16.5%和 17.3%。对于 CPMP 模型(P=12)，增加最小妒忌目标，最大距离、方差、标准差、变异系数和 Gini 系数均

减小显著。

表 3 案例 ZY 计算结果统计

Tab. 3 Computational results from instance ZY

模型	模型参数	设施数量	平均距离	最大距离	方差	标准差	变异系数	Gini 系数
CPMP	P=11	11	0.408	1.053	0.046	0.214	0.526	0.295
CPMP-envy	P=11,d^*=0.4km,α=20.0	11	0.420	1.006	0.034	0.184	0.439	0.244
CPMP	P=12	12	0.390	1.053	0.044	0.210	0.538	0.300
CPMP-envy	P=12,d^*=0.4km,α=20.0	12	0.399	0.957	0.030	0.173	0.434	0.243
CPMP	P=13	13	0.374	1.053	0.043	0.195	0.521	0.308
CPMP-envy	P=13,d^*=0.4km,α=20.0	13	0.386	1.006	0.028	0.168	0.435	0.240

备注：CPMP：容量约束 P 中心问题；CPMP-envy：最小妒忌公平性区位模型

图 2 为 CPMP 和 CPMP-envy 模型计算结果示意图。从图中可以看出，目标函数增加最小妒忌指标后，设施区位选择有很大变化，12 个设施中仅 2 个位置相同。



图 2 ZY 案例 CPMP(左)和 CPMP-envy(右)模型计算结果示意图

Fig. 2 CPMP (left) and CPMP-envy(right) solutions from instance ZY

案例 ZZ 计算结果统计见表 4。表中各栏目含义与表 1 相同。对于 CPMP 模型(P=64)，平均距离、最大距离、方差、标准差、变异系数和 Gini 系数依次为 0.727、3.596、0.154、0.392、0.540 和 0.293；增加最小妒忌目标，平均距离增加了 3.4%，但最大距离、方差标准差、变异系数和 Gini 系数减小显著，分别减少 10.6%、14.3%、7.40%、10.6%和 6.14%。设施数量减少(P=58)，CPMP 结果中，除平均距离指标外，各指标均变差，增加最小妒忌目标，公平性指标明显改善；设施数量增加(P=70)，呈现出类似结果。

表 4 案例 ZZ 计算结果统计

Tab.4 Computational results from instance ZZ

模型	模型参数	设施数量	平均距离	最大距离	方差	标准差	变异系数	Gini 系数
CPMP	P=58	58	0.758	3.897	0.178	0.422	0.557	0.303
CPMP-envy	P=58,d^*=0.75km,α=10.7	58	0.782	3.298	0.147	0.383	0.490	0.271
CPMP	P=64	64	0.727	3.596	0.154	0.392	0.540	0.293
CPMP-envy	P=64,d^*=0.75km,α=10.7	64	0.752	3.215	0.132	0.363	0.483	0.275
CPMP	P=70	70	0.692	3.298	0.147	0.383	0.530	0.271
CPMP-envy	P=70,d^*=0.75km,α=10.7	70	0.706	2.336	0.105	0.324	0.426	0.258

备注：CPMP：容量约束 P 中心问题；CPMP-envy：最小妒忌公平性区位模型

图 3 为 CPMP 和 CPMP-envy 模型(P=64)计算结果示意图。增加最小妒忌目标后，设施布局有明显的变化。CPMP-envy 模型结果中，36 个设施位置与 CPMP 模型结果相同。

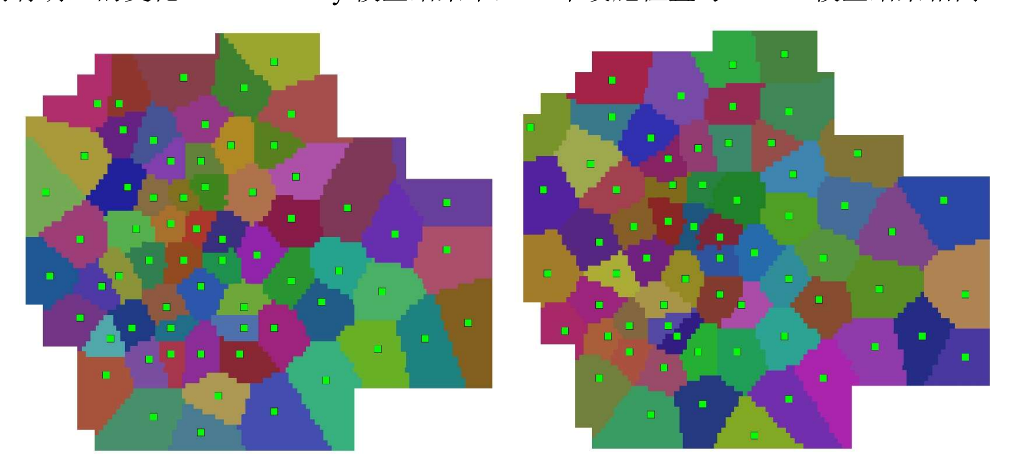


图 3 ZZ 案例 CPMP(左)和 CPMP-envy(右)模型计算结果示意图

Fig.3 CPMP (left) and CPMP-envy(right) solutions from instance ZZ

3.3 妒忌参数敏感性分析

本文妒忌指标计算与妒忌距离阈值参数d^*相关。设置这一参数可能对模型结果产生较大的影响。一般地，使用 CPMP 模型，获得使用服务的平均出行距离，参考这一距离设置参数d^*。也可以参照行业规范设置参数d^*，例如，15 分钟生活圈规划推荐了各类服务设施的服务半径，可以参考这一半径设置阈值。本节尝试设置不同的妒忌距离阈值参数，分析这一参数的敏感性。针对每个案例设置 3 个参数，进行模型计算。计算结果如表 5 所示。表 5 表明：(1)参数d^*对模型结果具有一定的影响，设置不同参数获得不同的平均距离、最大距离、方差和 Gini 系数；(2)与原模型相比，增加妒忌指标后，平均距离会有增加，但最大距离、方差和 Gini 系数指标均明显改善；(3)需求分布不均匀的农村地区，距离变异系数处于 0.65-0.70 区间，而需求分布较为均匀的城市地区，距离变异系数处于 0.43-0.50 区间。

表 5 设置不同妒忌距离阈值的 CPMP-envy 模型结果统计

Tab. 5 Computational results of minimum envy location models with different envy parameters

区域	模型参数	设施数量	平均距离	最大距离	方差	标准差	变异系数	Gini 系数
GY	P=22，d^*=1.8km,α=4.0	22	2.141	7.002	1.963	1.401	0.654	0.372
GY	P=22，d^*=2.0km,α=4.0	22	2.151	8.218	1.988	1.410	0.655	0.370
GY	P=22，d^*=2.2km,α=4.0	22	2.102	8.218	2.109	1.452	0.691	0.391
ZY	P=11，d^*=0.35km,α=20.0	11	0.422	1.006	0.035	0.187	0.443	0.248
ZY	P=11，d^*=0.40km,α=20.0	11	0.420	1.006	0.034	0.184	0.439	0.244
ZY	P=11，d^*=0.45km,α=20.0	11	0.424	1.006	0.034	0.184	0.435	0.242
ZZ	P=64，d^*=0.70km,α=10.0	64	0.742	3.896	0.136	0.369	0.497	0.273
ZZ	P=64，d^*=0.75km,α=10.0	64	0.752	3.215	0.137	0.370	0.492	0.275
ZZ	P=64，d^*=0.80km,α=10.0	64	0.754	2.499	0.128	0.358	0.474	0.266

3.4 与其他公平性模型比较

考虑到距离方差被推荐为公平性区位问题的常用指标[16-17]，本节尝试使用 MVLP 和

MVLP-MD 模型对案例 GY 进行求解。MVLP 和 MVLP-MD 模型使用 CPLEX 12.6 优化器直接求解。表 6 为 MVLP 和 MVLP-MD 模型部分计算结果。可以看出，MVLP 模型结果中，距离方差和 Gini 系数很小，但平均距离很大；MVLP-MD 能够根据最大均距约束获得不同的设施布局，随参数d'的增大，方差和 Gini 系数逐步减小。

表 6 案例 GY 计算结果统计

Tab. 6 Computational results from instance GY

模型	模型参数	设施数量	平均距离	最大距离	方差	标准差	变异系数	Gini 系数
MVLP	*P*=23	23	16.999	18.967	0.159	0.399	0.023	0.013
MVLP-MD	*P*=23,*d'*=8.0km	23	8.000	10.157	0.206	0.454	0.057	0.031
MVLP-MD	*P*=23,*d'*=3.0km	23	3.000	7.163	0.816	0.903	0.301	0.163
MVLP-MD	*P*=23,*d'*=2.0km	23	2.000	8.218	1.976	1.406	0.703	0.396

备注：MVLP：方差最小区位模型；MVLP-MD：最大距离约束的方差最小区位模型

值得注意的是，MVLP 模型计算复杂度极高，案例 GY 在 24h 计算时间内，仍不能获得最优解，且方差目标严重扭曲效率指标。图 4 左图为 MVLP 模型结果，绿色方块表示设施位置，设施服务区(设施服务需求点集合)使用不同颜色表示。模型结果具有以下特征：设施服务区凌乱；设施分布于需求密度稀疏区域；设施并不服务临近需求点，而是服务距离 16.0-18.0km 范围内的部分需求点。虽然 MVLP 模型结果明显不符合常理，但公平性指标很好，方差和 Gini 系数分别为 0.159 和 0.013。

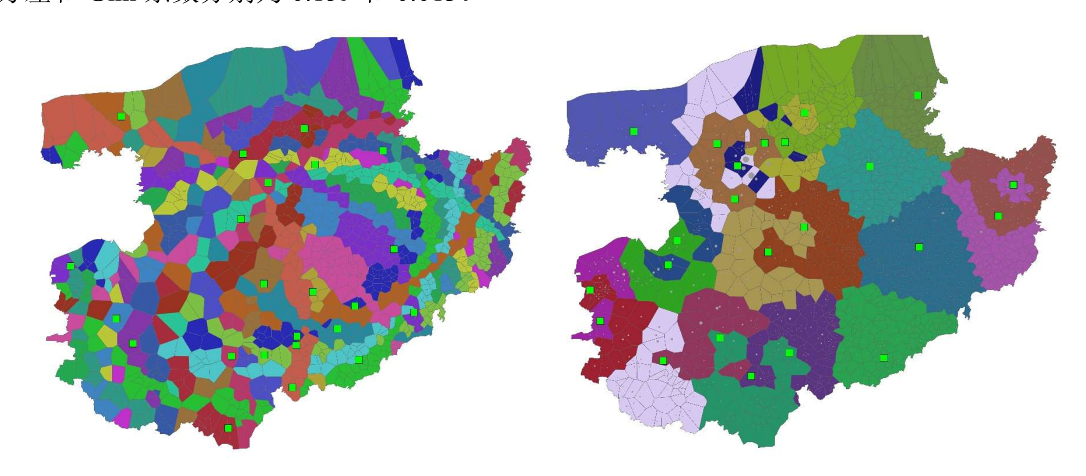


图 4 GY 案例 MVLP(左)和 MVLP-MD(右)模型计算结果示意图

Fig. 4 MVLP (left) and MVLP-MD (right) solutions from instance GY

图 4 右图为 MVLP-MD 模型(d'=3.0km)结果。与 MVLP 相比，MVLP-MD 模型计算复杂度大幅降低，倾向于在需求密度较高区域选择设施区位；但在部分区域，供需空间关系仍然被扭曲。当参数d'接近 CPMP 模型最优解时(最优距离为 1.948km)，MVLP-MD 与 CPMP 结果接近。

图 5 为距离参数d'(横轴，单位 km)与最小方差(纵轴)关系。当d' <1.948km 时，MVLP-MD 模型无可行解；增加d'数值，平均距离略小于d'，但最小方差显著下降；当d' >3.0km 时，最小方差下降幅度趋缓；当$d' > 17.0$km 之后，最小方差走势改变，开始呈现增加趋势；当$d' > 22.0$km 之后，最小方差呈现显著增加趋势。GY 案例模型计算表明：MVLP-MD 平均距离与最小方差呈现出长平底 U 型曲线。

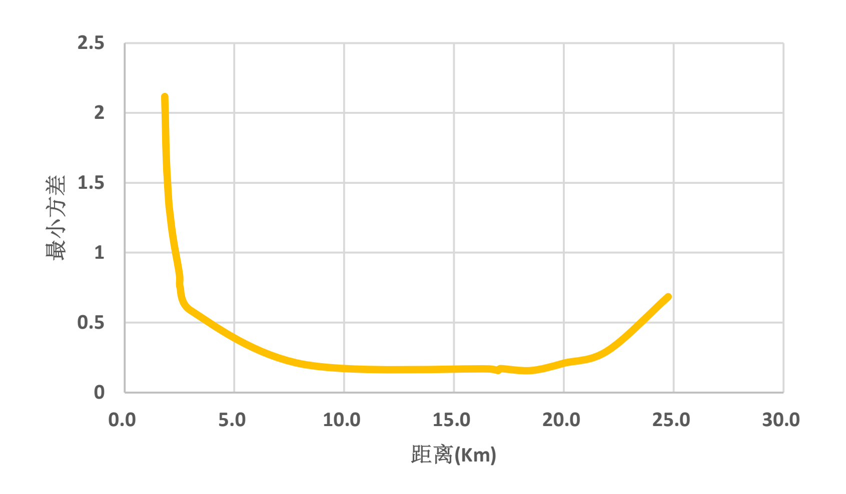


图 5 GY 案例 MVLP-MD 模型平均距离(横轴)与最小方差(纵轴)之关系

Fig. 5 Travel distance mean (horizontal) versus variance (vertical) of instance GY

空间可达性分析是评价和改善服务设施服务质量及其公平性的重要手段。基于 2SFCA 可达性方法，2SO4SAI 越来越受到关注。本节采用该方法进行案例测试，首先使用 PMP 模型选择设施区位，再参考文献[28]构建最小化 2SFCA 指标方差二次模型进行公平性资源分配。2SO4SAI 方法求解过程如下：首先使用 CPLEX 12.6 求解 PMP 模型，再参考文献[25]建立二次规划模型，使用 CPLEX 12.6 求解。

对于县级市案例 GY，选择设施数量 P=23，求解 PMP 获得设施区位及其服务区(设施服务需求点的集合)。使用服务出行距离、最大距离、方差和 Gini 系数分别为 1.866、8.218、1.898 和 0.414。设置资源总量为 900000，设施服务距离阈值为 4.0km 和 5.0km。资源分配结果如图 6 上左所示。图中，设施位置的三个直方图自左向右依次为设施服务区总需求量、4.0km 距离阈值资源分配量和 5.0km 距离阈值资源分配量。可以看出：资源分配结果受距离阈值参数影响显著；资源需求量与分配量有比较明显的差异；大体上，外围区域的设施资源分配相对于需求偏少，而中部区域，资源分配相对于需求偏高。

对于城市案例 ZY，选择设施数量 P=12，求解 PMP 获得设施区位及其服务区。使用服务出行距离、最大距离、方差和 Gini 系数分别为 0.388、1.053、0.042 和 0.295。设置资源总量为 4000，设施服务距离阈值为 0.6km、0.8km 和 1.0km。资源分配结果如图 6 上右所示。与案例 GY 相似，资源分配结果受距离阈值参数影响显著；资源需求量与分配量有较为明显的差异，但相对差异小于案例 GY。

对于大型城市案例 ZZ，选择设施数量 P=60，求解 PMP 获得设施区位及其服务区。使用服务出行距离、最大距离、方差和 Gini 系数分别为 0.738、3.897、0.143 和 0.279。设置资源总量为 4500000，设施服务距离阈值为 1.2km、1.5km 和 1.8km。资源分配结果如图 6 下所示。图中，设施位置的四个直方图最左向右依次为设施服务区总需求量、三个距离阈值资源分配量。可以看出：资源分配结果受距离阈值参数影响显著；资源需求量与分配量有比较明显的差异；外围区域的设施资源分配相对于需求偏少，而中部区域，资源分配通常高于需求。

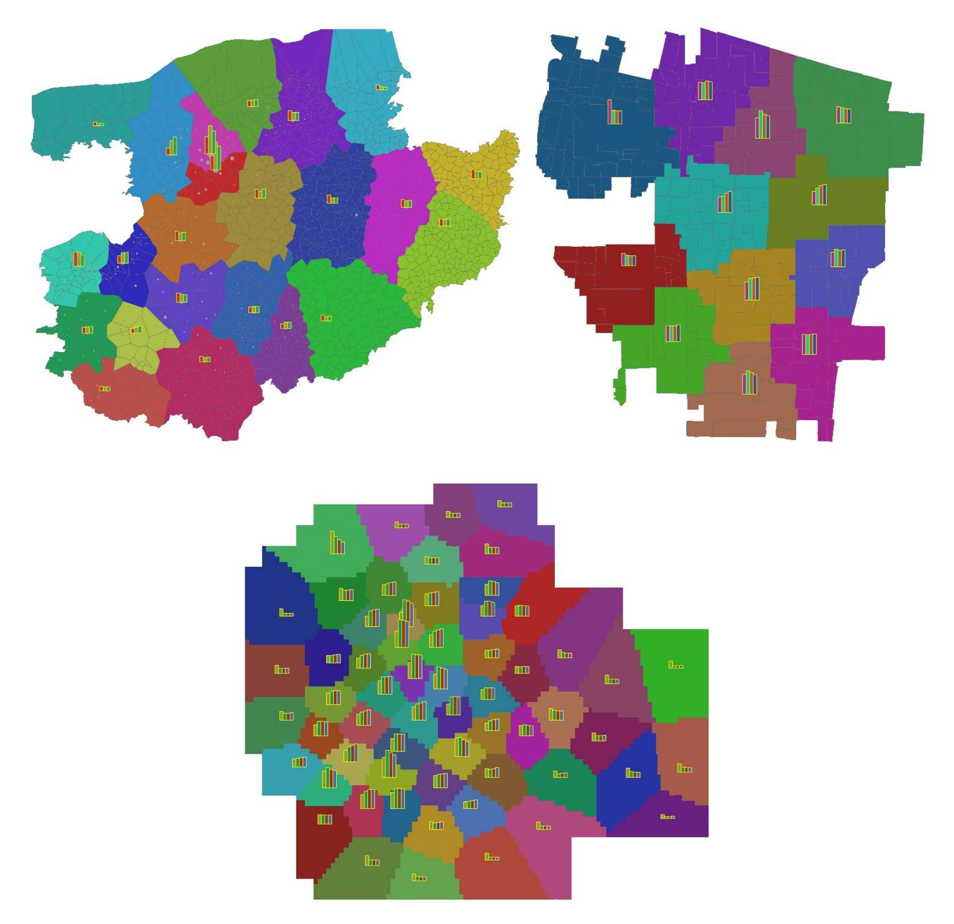


图 6 案例 GY(上左)、ZY(上右)和 ZZ(下)2SO4SAI 模型计算结果示意图

Fig. 6 2SO4SAI solutions from instances GY (upper left), ZY (upper right) and ZZ (bottom)

结合三个案例的需求分布特征，可以发现：2SO4SAI 受可达性模型距离参数影响显著；在人口密度高的地区，相对于需求量，模型倾向于为设施分配更多的资源；而在需求分布稀疏区域，相对于需求量，模型倾向于为设施分配更少的资源。作者认为，有必要针对 2SO4SAI 方法设计若干测试案例，系统地进行参数敏感性分析、供需关系分析、公平性指标分析，进一步验证该方法的基本特征及其可用性。

4 讨论与结论

自 1990s 初，学者逐步使用公平性指标构建公平性区位模型。常用公平性指标包括距离方差、基尼系数、期望值偏差、可达性方差等。然而，将这些指标用于设施选址，模型优化结果差异巨大。除 2SO4SAI 有少量案例应用研究外，鲜见最小化距离方差、基尼系数目标函数的实际应用。出现这一情况的原因在于：距离方差、基尼系数目标会严重扭曲空间可及性指标，导致模型结果不可用。因此，距离方差、基尼系数可以用于评价设施布局规划的空间公平性，但不宜作为优化目标。对于离散设施选址，本文 MVLP-MD 模型实验表明：设施数量保持不变，出行距离均值与最小距离方差呈现出一条长平底 U 型曲线(图 5)。随出行距离均值增加，距离方差快速下降，但下降趋势逐步变缓；出行距离均值达到某一阈值后，方差处于很低水平；出行距离均值达到某一很大的阈值时，方差又开始增加。在曲线底部的距离区间内，方差指标表现优异，但在这一区间，出行距离被严重扭曲。

基于图 5 所示的出行距离与距离最小方差之间的关系，有三个重要的启示：(1)区位模型不能将距离方差作为优化目标，因为 U 型曲线方差较小区域，出行距离已经被严重扭曲；(2)距离方差目标配合出行距离约束仍旧不具有可行性，出行距离设置较大时，模型结果无实际意义，即使出行距离设置较小(U 型曲线最左的区间)，部分区域的出行距离被会被扭曲(如图 1 右图所示)；(3)距离方差也不宜作为多目标优化的目标函数，原因在于模型 Pareto 解集中，大多数解的效率指标被严重扭曲。

基于 2SFCA 空间可达性模型进行公平性资源分配，三个区域案例的实验结果表明：多数设施服务区内会出现供需失衡。作者认为，出现该现象的根本原因在于 2SFCA 可达性模型本身的局限：可达性指标对于距离衰减模型选择、模型参数设置敏感，计算结果的物理意义不够清晰[35]。本质上，一个服务系统的供需关系很难使用一个距离衰减模型进行准确表达，因服务供需关系不仅受到距离影响，也与需求空间分布特征、供应分布特征密切相关。

本文将最小方差指标修订为最小“妒忌”指标。该修订基于一个假设：使用服务的出行距离较近时，需求者不会有不公平感知，或者说不会嫉妒其他需求者；使用服务出行较远而不够便捷时，需求者会产生不公平感知，或者说会嫉妒其他需求者，不公平测度或者妒忌测度与出行距离相关。基于这一假设，本文嫉妒指标仅计算距离超过某一阈值的需求者。这一指标与经典模型的成本指标不冲突，乘以一个特定系数后，妒忌指标量纲与出行成本量纲也能够相一致，从而易于集成在经典模型中。本文三个区域案例的实验表明：最小妒忌指标能够用于改进 CPMP 模型的目标函数；目标函数改进后，出行距离略有增加(增幅约 2~7%)，同时，最大距离、方差、标准差、变异系数和 Gini 系数等公平性指标显著改善；当设施数量较少时，公平性指标改善尤为显著。

作者认为，最小妒忌指标在公平性区位问题建模中具有理论价值，在公共服务设施布局规划中具有应用潜力。进一步的研究工作包括：从理论上验证公共服务妒忌假设能够成立，并建立妒忌度量模型，推荐合适的模型结构及参数取值；进一步改进模型求解算法，能够高效高质量地求解新模型；选择更多的实际案例测试并验证最小妒忌指标可用性；探索公共服务最小妒忌指标、供给成本指标、空间可及性指标、公平性指标之间可能存在的规律。

参考文献(References)

[1] Laporte G, Nickel S, Gama F. Location science (2nd edition). Berlin: Springer, 2019.

[2] Berge C. Two theorems in graph theory. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1957, 43(9):842-844.

[3] Cooper L. Location-allocation problems. Operations Research,1963, 11:331-343.

[4] Hakimi S L. Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. Operations Research, 1964, 12:450-459.

[5] Church R L, ReVelle C. The maximal covering location problem. Papers in Regional Science,1974, 32:101-118.

[6] Balinski M L. Integer programming: methods, uses, computation. Management Science,1965, 12:253-313.

[7] Levy J. An extended theorem for location on a network. Operational Research Quarterly. 1967, 18:433-442.

[8] Barilan J, Kortsarz G, Peleg D. How to allocate network centers. Journal of Algorithms,1993,

15(3):385-415.

[9] Current J R, Storbeck J E. Capacitated covering models. Environment and Planning B: Planning and Design,1988,15(2):153-163.

[10] Geoffrion A M, Graves G W. Multicommodity distribution system design by Bender's decomposition. Management Science, 1974, 20:822-844.

[11] Song Zhengna, Chen Wen, Yuan Feng, et al. Formulation of Public Facility Location Theory Framework and Literature Review. Progress in Geography, 2010, 29(12): 1499-1508 [宋正娜, 陈雯, 袁丰, 等.公共设施区位理论及其相关研究述评. 地理科学进展, 2010,29(12): 1499-1508.]

[12] Cheng Shunqi, Qi Xinhua, Jin Xinxin, et al. Progress in domestic and foreign study on spatial layout of public service facilities. Tropical Geography, 2016, 36(1): 122-131. [程顺祺,祁新华,金星星,等. 国内外公共服务设施空间布局研究进展. 热带地理, 2016, 36(1): 122-131.]

[13] Tao Zhuolin, Cheng Yang, Dai Teqi, et al. research progress and prospect of public service facilities layout optimization models, City Planning Review, 2019,43(08): 60-68. [陶卓霖,程杨,戴特奇，等. 公共服务设施布局优化模型研究进展与展望. 城市规划，2019,43(08): 60-68.]

[14] Zhan Dongsheng, Zhang Wenzhong, Zhan Li, et al. Research progress and its enlightenment of urban public service facilities allocation. Progress in Geography, 2019, 38(4): 506-519. [湛东升，张文忠，谌丽，等. 城市公共服务设施配置研究进展及趋向. 地理科学进展, 2019, 38(4): 506-519.]

[15] Wang F. Four methodological themes in computational spatial social science. In: Li B, et al. (eds) New Thinking in GIScience, 2022, Springer, Singapore: 275-282.

[16] Barbati M, Bruno G. Exploring similarities in discrete facility location models with equality measures. Geographical Analysis, 2018, 50: 378-396.

[17] Mulligan G F. Equality measures and facility location. Papers in Regional Science, 1991, 70(4):345-365.

[18] Drezner T, Drezner Z, Guyse J. Equitable service by a facility: Minimizing the Gini coefficient. Computers & Operations Research, 2009, 36 (12): 3240-3246.

[19] Ogryczak W, Zawadzki M. Conditional Median: A parametric solution concept for location problems. Annals of Operations Research, 2002, 110: 167–181.

[20] Smith H, Harper P, Potts C. Bicriteria efficiency/equity hierarchical location models for public service application. Journal of Operations Research Society, 2013, 64: 500–512.

[21] Berman O. Mean-variance location problems. Transportation Science, 1990, 24(4):287-293.

[22] Wang F, Tang Q. Planning toward equal accessibility to services: a quadratic programming approach. Environment and Planning B: Planning and Design, 2013, 40 (2): 195–212.

[23] Li X, Wang F, Yi H. A two-step approach to planning new facilities towards equal accessibility. Environment and Planning B: Planning and Design, 2017.

[24] Wang Fahui, Dai Teqi. Spatial optimization and planning practice towards equal access of public services. Journal of Urban and Regional Planning, 2020, 12(2): 28-40. [王法辉，戴特奇. 公共资源公平配置的规划方法与实践. 城市与区域规划研究, 2020,12(02):28-40.]

[25] Li M, Wang F, Kwan M, et al. Equalizing the spatial accessibility of emergency medical services in Shanghai: A trade-off perspective. Computers, Environment and Urban Systems, 2022, 92, 101745.

[26] Tao Zhuolin, Dai Teqi, Song Changqing. Improving spatial equity-oriented location-allocation

models of urban medical facilities. Acta Geographica Sinica, 2023, 78(2): 474 -489. [陶卓霖，戴特奇，宋长青. 空间公平导向的城市医疗设施优化配置模型研究. 地理学报, 2023, 78(2): 474-489.]

[27] Mayhew L D, Leonardi G. Equity, efficiency, and accessibility in urban and regional Health-Care Systems. Environment and Planning A: Economy and Space, 1982, 14(11), 1479–1507.

[28] Cho C J. An equity-efficiency trade-off model for the optimum location of medical care facilities. Socio-Economic Planning Sciences, 1998, 32(2): 99-112.

[29] Ogryczak W. Inequality measures and equitable approaches to location problems. European Journal of Operational Research, 2000, 122(2): 374-391.

[30] Mitropoulos P, et al. A biobjective model for the locational planning of hospitals and health centers. Health Care Management Science, 2006, 9, 171-179.

[31] Khodaparasti S, Maleki HR, Bruni M E, et al. Balancing efficiency and equity in location-allocation models with an application to strategic EMS design. Optimization Letters,2016, 10, 1053-1070.

[32] Luo W, Yao J, Mitchell R, et al. Locating emergency medical services to reduce urban-rural inequalities. Socio-Economic Planning Sciences, 2022, 84, 101416.

[33] Filippi C, Guastaroba G, Huerta-Muñoz D L, et al. A kernel search heuristic for a fair facility location problem. Computers & Operations Research, 2021, 132, 105292.

[34] Kong Y. A matheuristic algorithm for the single-source capacitated facility location problem and its variants, ArXiv, 2021, https://doi.org/10.48550/arXiv.2112.12974.

[35] Zhai Shiyan, He Xinxin, Kong Yunfeng, et al. Measuring the spatial accessibility of public services by optimal supply-demand allocation. Acta Geographica Sinica, 2022,77(4)：1028-1038. [翟石艳,何新新,孔云峰等.基于最优供需分配的公共设施空间可达性分析.地理学报,2022,77(4)：1028-1038.]

A minimum-envy location problem for spatial equality of public service: model formulation and case analysis

Yunfeng Kong[1,2], Shiyan Zhai[1,2]

(1 Key Laboratory of Geospatial Technology for the Middle and Lower Yellow River Regions, Ministry of Education, Henan University, Kaifeng, China 47500; 2 College of Geography and Environmental Science, Henan University, Kaifeng, China 47500)

Abstract: Location problems have been widely applied to service planning of public health, compulsory education, emergency management, and delivery logistics. However, the mainstream location models are usually to optimize the efficiency objectives such as travel cost, facility cost and the number of customs to be served, rather than the equality objectives. A few location models aim to optimize one of the equality measures, such as the variance of distances, the deviation of distances, the Gini coefficient between the travel distances, and the variance of spatial accessibility indexes. However, the facility locations, capacities and their service areas can be easily distorted by most equality-oriented objective functions. In this paper, a spatially envy objective function for

service equality is proposed to overcome the shortcomings of commonly used equality functions. The envy value of customers at a location is determined by their travel distance that beyond a predefined distance. The envy function can be added to mainstream location models in a weighted manner. As a result, the capacitated p-median problem (CPMP) is enhanced as CPMP-envy. The original and improved models were tested on three large instances. Case experiments show that the equality measures, such as maximum travel distance, variance of distances, coefficient of variation, and Gini coefficient between travel distances, can be substantially improved by minimizing the weighted sum of spatial envy and travel cost. It is argued that the envy indicator has theoretical and practical potentials in facility planning towards spatial equality of public service.
Keywords: public service; location model; spatial equality; minimum variance; minimum envy; case analysis.